Concours en Mathématiques et Physique

Epreuve de Physique

Date : Jeudi 08 Juin 2006	Heure : 8 H 00	Durée : 4 H	Nbre pages :06
Barème : Problème 1: 9 pts (A/1.5 ; B/7. 5) ; Problème 2: 11 pts (A/6.5 ; B/4.5)			

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

PROBLEME 1 : *Effet de peau dans un conducteur*

Dans ce problème, on s'intéresse à l'effet de peau dans un métal homogène et isotrope. Dans le domaine de fréquence envisagée dans cette étude (fréquences hertziennes), on peut décrire ce métal comme un milieu possédant une conductivité électrique scalaire réelle et finie σ indépendante de la fréquence et ayant la permittivité électrique ε_0 et la perméabilité magnétique μ_0 du vide. Au sein du métal, la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant au point M à l'instant t, $\vec{j}(M,t)$, au champ électrique $\vec{E}(M,t)$ s'écrit : $\vec{j}(M,t) = \sigma\,\vec{E}(M,t)$.

On utilise le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Données numériques: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ F m^{-1}, $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ H m^{-1}, σ = 5,9 10^7 S m^{-1}.

On donne en coordonnées cylindriques le laplacien vecteur d'un champ vectoriel $F_z(r)\,\vec{u}_z$:

$$\vec{\Delta}\left(F_z(r)\,\vec{u}_z\right) = \left(\frac{d^2F_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_z(r)}{dr}\right)\vec{u}_z$$

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{X}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{X}\right) - \vec{\Delta}\vec{X}$ où $\vec{\Delta}\vec{X}$ désigne le laplacien vecteur de $\vec{X}$.

On considère un cylindre plein en cuivre de conductivité électrique σ, d'axe Oz, de rayon $a = 0,5\ mm$ et de longueur L grande devant a.

A- Régime continu

Un générateur extérieur impose dans le conducteur un champ électrique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oz : $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_z$.

1.a) Déterminer l'intensité I du courant circulant dans le conducteur en fonction de σ, E_0 et a.

1.b) Montrer que la différence de potentiel entre les points A (z = 0) et B(z = L) situés aux extrémités du cylindre est proportionnelle au courant I traversant le cylindre: $V_A - V_B = R_0 I$.

On exprimera la résistance R_0 en fonction de L, σ et a.

2.a) Déterminer la puissance volumique p_v transmise par le générateur aux électrons du conducteur.

2.b) Déduire la puissance totale P en fonction de R_0 et I.

B- Régime variable

Le générateur extérieur impose maintenant dans le conducteur un champ électrique $\vec{E}$ sinusoïdal de pulsation ω et parallèle à l'axe Oz.

1) Expliquer pourquoi le champ électrique dans le conducteur ne peut pas être uniforme en régime variable.

2.a) Rappeler l'équation de conservation de la charge électrique sous sa forme locale.

En utilisant les formes locales de la loi d'Ohm et de l'équation de Maxwell-Gauss, déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charges électriques $\rho(M,t)$.

2.b) Supposons, pour une raison quelconque, qu'en un point M du métal existe à l'instant t = 0 un excès local de charge correspondant à une densité volumique ρ_o.

Exprimer $\rho(M,t)$ en fonction de ρ_o et montrer qu'elle décroît avec une durée caractéristique τ qu'on exprimera en fonction de σ et ε_0 et dont on donnera la signification.

Donner la valeur numérique de τ. Conclure.

On supposera dans la suite que le conducteur métallique est localement neutre.

2.c) Dans la gamme de fréquence envisagée, vérifier qu'on peut négliger le courant de déplacement $\vec{j}_D$ devant le courant de conduction $\vec{j}$.

On supposera cette condition vérifiée dans la suite.

3) On suppose que le vecteur densité de courant, en un point M du cylindre, à la distance r de l'axe Oz est donné en écriture complexe par :

$$\underline{\vec{j}}(M,t) = \underline{j}(r)\exp(-i\omega t)\,\vec{u}_z$$

3.a) Dans le cadre des deux approximations précédentes, écrire les équations de Maxwell dans le conducteur.

3.b) Montrer que le vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}}$ dans le conducteur vérifie l'équation locale :

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{j}} + \frac{2i}{\delta^2}\underline{\vec{j}} = \vec{0} \qquad (1)$$

où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω, μ_0 et σ .

4) En posant $x = \dfrac{r}{\delta}$, déduire que le rapport $\underline{y} = \dfrac{\underline{j}(x)}{\underline{j}(0)}$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\underline{y}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\underline{y}}{dx} + 2i\underline{y} = 0 \qquad (2)$$

5) On cherche une solution paire de l'équation (2) sous la forme d'une série entière :

$$\underline{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{c}_{2n}\, x^{2n} \text{ avec } c_0 = 1.$$

Démontrer que l'expression générale de $\underline{y}$ est de la forme : $\underline{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2^n (n!)^2} x^{2n}$.

Expliciter le développement de $\underline{y}$ à l'ordre 4 suivant les puissances croissantes de x. En se limitant à l'ordre 4 pour le carré du module de $\underline{y}$, donner l'expression de $\mathrm{Y}(x) = |\underline{y}(x)| = \frac{|\underline{j}(x)|}{|\underline{j}(0)|}$.

6) On caractérise le rayon du cylindre par le paramètre $\alpha = \frac{a}{\delta}$ et on désigne par α_i la valeur que prendra α pour une fréquence ν_i. On donne $\nu_1 = 50$ Hz et $\nu_2 = 2$ MHz.
Calculer α_1 et α_2.
En utilisant l'expression de Y, évaluer $\mathrm{Y}(\alpha_1)$.
La solution complète de l'équation (2) donne $\mathrm{Y}(\alpha_2) = 4{,}985$.
Commenter les résultats obtenus.

7) Soit R_0 la résistance du cylindre étudié en courant continu et R la résistance du même cylindre en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.
On montre qu'un développement de $\rho = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}$ à l'ordre 4 en α s'écrit : $\rho = 1 + \frac{\alpha^4}{48}$.
En utilisant l'expression de ρ, évaluer $\rho(\alpha_1)$.
En utilisant la solution complète de l'équation (2), on obtient $\rho(\alpha_2) = 5{,}650$.
Commenter les résultats obtenus.

8) On cherche une solution de l'équation (1), dans laquelle on remplace $\vec{\Delta}\underline{\vec{j}}$ par $\frac{d^2\vec{j}}{du^2}$, sous la forme :

$$\underline{\vec{j}} = j_0 \exp[i(\underline{k}\,u - \omega t)]\,\vec{u}_z$$

avec $u = a - r$ et où $\underline{k}$ est un complexe à déterminer.
Cette solution est valable si a >> δ pour la fréquence utilisée (hypothèse d'un milieu semi-infini).
8.a) En déduire la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \mathrm{f}(\omega)$ et justifier qu'une seule des deux solutions pour $\underline{k}$ est physiquement acceptable.
Exprimer alors la solution retenue pour $\underline{k}$ en fonction de δ.
8.b) Interpréter physiquement la solution proposée.
Tracer l'amplitude $j(r)$ de $\vec{j}$ en fonction de r. Justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ.
9.a) Expliquer qualitativement comment varie la résistance électrique R avec la fréquence de l'onde.
9.b) Déterminer l'expression de R dans ce cas.
10) Ce cylindre convient-il à la transmission des fréquences radio ($\nu = 100$ MHz) ? Expliquer.

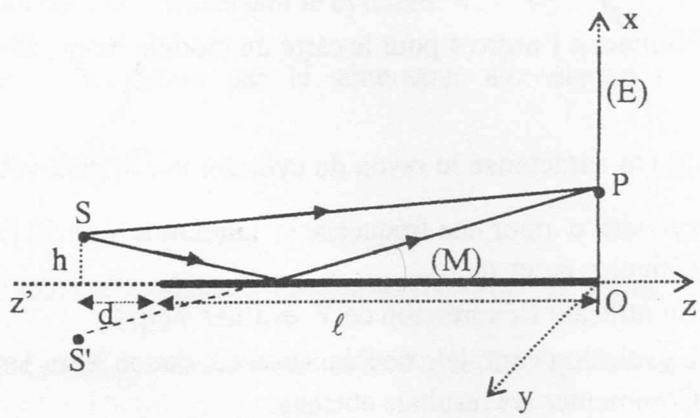
PROBLEME 2 : *Interférences et diffraction lumineuses*

L'espace est rapporté à un repère (Oxyz) de base orthonormée directe ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$).

On rappelle que la fonction sinus cardinal sinc(v) est définie par : $\text{sinc(v)} = \dfrac{\sin(\text{v})}{\text{v}}$

A- Interférences lumineuses

On considère un miroir carré (M), de côté ℓ, disposé dans le plan (yOz), symétriquement par rapport à (z'z) et dans l'espace des z négatifs. Ce miroir est éclairé par une source S, de coordonnées cartésiennes (h, 0, -(ℓ+d)). On désigne par S' l'image de S par (M). On observe le phénomène d'interférences dans un plan (E) confondu avec le plan (xOy) (voir figure ci-contre).



On supposera dans toute cette partie que la norme de l'amplitude du champ électrique réfléchi est égale à celle de l'onde incidente.
On donne ℓ = 24 cm , d = 1 cm et h = 0,3 mm (ℓ + d >> h).

I- Source ponctuelle monochromatique

La source S, supposée ponctuelle, émet de la lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 = 600 nm.

1.a) Justifier pourquoi ce dispositif est à division de front d'onde.
1.b) Représenter le champ d'interférence.
2.a) Montrer que l'intensité lumineuse en un point P de (E) s'écrit :

$$I(P) = 2I_{01}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{2\,h\,x}{\ell + d} + \frac{\lambda_0}{2}\right)\right)\right].$$

2.b) Quelle est la nature de la frange en x = 0 ? Justifier.
2.c) Calculer l'interfrange i.
2.d) En pratique, comment peut-on mesurer i ?
2.e) Déterminer le nombre de franges sombres N_S observées.

II- Source étendue

1) La source monochromatique ponctuelle S est déplacée parallèlement à (Oy).
Dire en le justifiant si la figure d'interférence obtenue précédemment est modifiée.
2) La source S étant ramenée à sa position initiale. On ajoute deux sources ponctuelles S_1 et S_2, émettant la même longueur d'onde que S, à une même distance de part et d'autre de S. Le segment S_1S_2 de centre S est parallèle à (Oy).
Qu'observe-t-on sur (E) ? Justifier.
3) Le miroir (M) est maintenant éclairé par une fente F_S de largeur a (a < h) suivant (Ox) et de longueur parallèle à (Oy). F_S est centrée sur la position initiale de S.

On suppose que l'intensité élémentaire dI émise par un élément dX de F_S, centré sur un point d'abscisse X par rapport au centre de la fente en un point P de (E) s'écrit:

$$dI(P) = 2\frac{I_0}{a}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,\delta_g(P)\right)\right]dX$$

où $\delta_g(P)$ est la différence de marche géométrique en un point P de (E).

3.a) Montrer que l'intensité en un point P de (E) s'écrit :

$$I(x) = 2\,I_0\left(1 - \mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,\frac{a\,x}{\ell + d}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right)$$

où i est l'interfrange déterminée dans I.2.c).

3.b) Tracer l'allure de I(x) pour h = 3 a. Commenter.

Pour quelles valeurs de x obtient-on un brouillage de la figure d'interférence ?

III- Source de lumière blanche

La source ponctuelle S de coordonnées cartésiennes $(h, 0, -(\ell+d))$ éclairant (M) émet maintenant de la lumière blanche comportant toutes les radiations de longueurs d'ondes comprises entre 400 nm et 700 nm (400 nm $\leq \lambda_0 \leq$ 700 nm).

1) Décrire l'aspect de (E).

2) On place dans le plan (E), la fente d'entrée, supposée fine, d'un spectroscope à la distance x.

2.a) Décrire l'aspect du spectre obtenu.

2.b) Déterminer le nombre de radiations absentes (éteintes) de ce spectre lorsque x = 1,5 mm, puis x = 3 mm. Conclure.

B- Diffraction lumineuse

I- Diffraction par un miroir

Soit un miroir (M) rectangulaire plan de centre O, de longueur ℓ et de largeur a (Figure 1). La longueur ℓ est suffisamment grande pour ne pas tenir compte de la diffraction dans la direction correspondante. Le miroir est éclairé sous une incidence i dans le plan (xOy) par un faisceau de lumière parallèle provenant d'une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide. On se propose d'analyser la figure de diffraction à l'infini dans une direction i' (Figure 2).

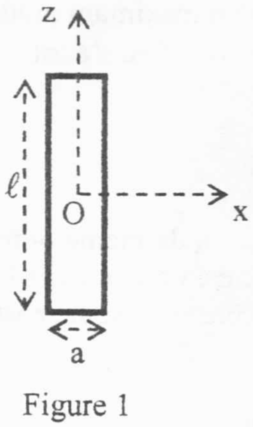


Figure 1

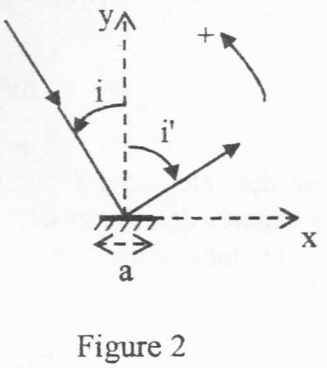


Figure 2

1) Montrer que l'intensité I diffractée par le miroir dans une direction i' s'écrit sous la forme :

$$I = I_0 \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\pi a}{\lambda_0}(\sin i + \sin i')\right]$$

où I_0 est l'intensité maximale.

2) Déterminer l'angle i'_{max} correspondant au maximum d'intensité diffractée.

Que représente la direction i'_{max} ?

Calculer l'intensité des deux premiers maxima secondaires.

II- Diffraction par un réseau

Un réseau plan, est constitué de N miroirs identiques à (M), parallèles coplanaires espacés régulièrement d'une distance d (d > a) et disposés sur une largeur L. Ce réseau est éclairé en incidence <u>normale</u> par une onde plane.

1) L'onde incidente est supposée monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide.

1.a) Déterminer l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction i' par ce réseau.

1.b) En déduire que l'intensité diffractée dans la direction i' s'écrit sous la forme :

$$I_R = I_{0R}\mathrm{sinc}^2[\pi a u]\left[\frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{N\sin(\frac{\varphi}{2})}\right]^2$$

où φ est le déphasage entre deux points, distants de d, appartenant à deux miroirs successifs. Donner les expressions de u et I_{0R} .

1.c) Déterminer la relation fondamentale pour un réseau par réflexion donnant les directions des maxima d'intensité. On désignera par q l'ordre du spectre.

1.d) Montrer que la demi-largeur angulaire à la base du maximum d'intensité d'ordre q s'écrit :

$$\Delta i' = \frac{\lambda_0}{L\cos i'}$$

2) L'onde incidente est issue maintenant d'une lampe spectrale émettant un doublet de longueurs d'ondes $\lambda_0 = 577$ nm et $\lambda_0 + \Delta\lambda = 579$ nm ($\Delta\lambda << \lambda_0$).

2.a) Montrer que l'écart angulaire permettant de passer d'un maximum produit par la radiation de longueur d'onde λ_0 à celui produit par $\lambda_0 + \Delta\lambda$ pour un ordre q fixé s'écrit :

$$\Delta i'_q = \frac{q}{d}\frac{\Delta\lambda}{\cos i'_q}$$

2.b) On considère que des raies sont séparées si les maxima de même ordre des deux longueurs d'onde sont au moins séparés de la demi-largeur angulaire d'un pic principal.

Dire en le justifiant si les longueurs d'ondes du doublet considéré sont séparées à l'ordre 1 par le réseau dont N = 1000.

Fin de l'épreuve